

Théorème de Hardy

Ce développement assez original présente une fonction continue mais dérivable en aucun point. On y montre d'abord un lemme qui se base sur des résultats de théorie de Fourier et de théorie de la mesure, afin de l'utiliser dans le cas de notre fonction.

Ce développement est plutôt intéressant puisqu'il parvient à se recaser correctement sans être très connu des candidats. Le recasage est selon moi parfait pour les leçons 228 et 241. A mon avis, l'utilisation assez cruciale de la théorie de Fourier justifie aussi un recasage en 250. Enfin, je pense que l'utilisation de théorèmes d'intégration (en plus de la transformée de Fourier!) me poussent à dire qu'on pourrait même le recaser dans des leçons comme la 234 ou 235.

I - Le développement

✚ Théorème 1

Soit $a \in]0, 1[$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $|ab| > 1$. On pose pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$W(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a^m \cos(b^m t).$$

Alors W est bien définie sur $\mathbb{R}$, est continue bornée, mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Preuve :

Étape 1 : Continuité de la fonction

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a^m \cos(b^m t)| \leq |a|^m$$

On en déduit que la série $\sum a^m \cos(b^m t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ puisque $|a| < 1$. Donc la fonction W est bien définie et est continue (et même bornée).

Étape 2 : Un lemme fondamental

Soit φ une fonction plateau sur l'intervalle $[1/(2b), b/2]$, nulle en dehors de $[1/b, b]$. On a $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donc par inversion de Fourier, $\Psi := 2\pi\hat{\varphi}(-\cdot)$ vérifie :

$$\begin{cases} \hat{\Psi}(1) = 1 \\ \hat{\Psi} \equiv 0 \text{ sur } \left] -\infty, \frac{1}{b} \right[\cup [b, +\infty[\end{cases}$$

On remarque de plus par les formules de dérivation des transformées de Fourier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{\mathbb{R}} t^k \Psi(t) dt = \frac{1}{(-i)^k} \hat{\Psi}^{(k)}(0) = 0.$$



Lemme 2

Soit $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$. Posons pour $p \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$\Psi_p(t) = b^p \Psi(b^p t).$$

Alors

$$f * \Psi_p(t_0) \underset{p \rightarrow +\infty}{=} o(b^{-p}), \quad \text{où .}$$



Preuve :

$$\begin{aligned}
f * \Psi_p(t_0) &= \int_{\mathbb{R}} f(t_0 - t) \Psi_p(t) dt = b^p \int_{\mathbb{R}} f(t_0 - t) \Psi(b^p t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f\left(t_0 - \frac{t}{b^p}\right) \Psi(t) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[f\left(t_0 - \frac{t}{b^p}\right) - f(t_0) \right] \Psi(t) dt \quad \text{car } \int_{\mathbb{R}} \Psi(t) dt = 0 \\
&= \frac{1}{b^p} \int_{\mathbb{R}} t \left[\frac{f\left(t_0 - \frac{t}{b^p}\right) - f(t_0)}{t/b^p} \right] \Psi(t) dt
\end{aligned}$$

Or, pour $p \geq 1$,

$$\left| \frac{f\left(t_0 - \frac{t}{b^p}\right) - f(t_0)}{t/b^p} \right| \times |t \Psi(t)| \leq K \cdot |t \Psi(t)|,$$

où K majore le taux d'accroissement car f est dérivable en t_0 (donc le taux est borné au voisinage de 0) et f est bornée (donc le taux est borné en $\pm\infty$).

Par convergence dominée, on obtient donc :

$$b^p (f * \Psi_p(t_0)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} t f'(t_0) \Psi(t) dt = 0$$



Étape 3 : W n'est dérivable nul part.

Supposons W dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$, alors comme W est continue et bornée, le lemme fournit l'estimation suivante :

$$W * \Psi_p(t_0) \underset{p \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{b^p}\right).$$

Cependant :

$$\begin{aligned}
W * \Psi_p(t_0) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{m=0}^{+\infty} a^m \cos(b^m t) \Psi_p(t_0 - t) dt \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} a^m \cos(b^m t) \Psi_p(t_0 - t) dt \quad \text{par Fubini car } W \text{ cvn et est intégrable} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} a^m \int_{\mathbb{R}} (e^{ib^m t} + e^{-ib^m t}) \Psi_p(t_0 - t) dt \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} a^m \left[e^{ib^m t_0} \int_{\mathbb{R}} e^{-ib^m t} \Psi_p(t) dt + e^{-ib^m t_0} \int_{\mathbb{R}} e^{ib^m t} \Psi_p(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{+\infty} a^m \left[e^{ib^m t_0} \hat{\Psi}(b^{m-p}) + e^{-ib^m t_0} \hat{\Psi}(-b^{m-p}) \right] \\
&= \frac{1}{2} a^p e^{ib^p t_0} \quad \text{d'après les propriétés de } \Psi.
\end{aligned}$$

On aboutit à une contradiction car $(ab)^p e^{ib^p t_0}$ ne converge pas vers 0 par hypothèse sur le choix de a et b . 

II - Remarques

1 - Une fois la preuve connue, c'est un développement qui me semble assez naturel dans sa preuve, et il n'y a pas de gros point technique à faire particulièrement attention (on pourrait très bien le présenter en ne connaissant que les grosses étapes et en faisant les calculs 'en impro'). Il faut cependant faire attention pour les plus rapides, car c'est un développement qui peut se faire très vite, et se finir bien avant les 15 minutes (surtout sous le coup du stress). N'hésitez donc pas à bien détailler le jour de l'oral les passages qui peuvent paraître un peu technique.

2 - Dans ma référence [Chi], la preuve du lemme n'est pas faite de la même manière. J'avoue préférer ma méthode (en espérant qu'elle soit juste), car l'utilisation d'un TCD me semble bien plus naturelle pour les candidats.

3 - La fonction de Weierstrass fait historiquement partie des courbes 'monstre' qui ont été étudiées au 19^{ème} siècle (comme par exemple la courbe de Bolzano). Elle présente notamment un aspect fractal.

III - Références

[Chi] : *Chemin d'analyse - Tome 1*, David Chiron